ISRAEL JOURNAL OF MATHEMATICS, Vol. 66, Nos. 1-3, 1989

SUR LES GROUPES D'HOMOTOPIE DES ESPACES DONT LA COHOMOLOGIE MODULO 2 EST NILPOTENTE

BY

JEAN LANNES[a] ET LIONEL SCHWARTZ[b]

[a]*Ecole Polytechnique, Centre de Mathématiques, UA 169 du CNRS, route de Saclay, F-91128, Palaiseau, Cedex, France; et*

[b]*Université de Paris-Sud, Mathématiques, Bat 425, UA 11 69 du CNRS, F-91405, Orsay, Cedex, France*

ABSTRACT

The main object of this note is to prove the following generalisation of a theorem of Serre. A simply connected space of finite type whose mod. 2 cohomology is nilpotent (and non-trivial) has infinitely many homotopy groups which are not of odd torsion. Incidentally we show that for every fibration $F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B$, satisfying certain mild conditions, the following holds. If a class x in the mod. 2 cohomology of E belongs to the kernel of i^*, then some power of x belongs to the ideal generated by the image under p^* of the mod. 2 reduced cohomology of B.

0. Introduction

En 1953 J.-P. Serre a démontré le théorème suivant:

THÉORÈME [Se]. *Soit X un espace simplement connexe dont la cohomologie modulo 2 est de dimension finie en chaque degré (nous dirons, pour abréger, que X est de type fini en 2). On suppose:*

(a) *la cohomologie $\tilde{H}^*(X; \mathbf{F}_2)$ est non triviale;*

(b) *les groupes $H^n(X; \mathbf{F}_2)$ sont nuls pour tout n assez grand.*

Alors, pour une infinité d'entiers n, la multiplication par 2 du groupe $\pi_n X$ dans lui-même n'est pas un isomorphisme.

Il conjecturait alors que l'on pouvait dans l'énoncé précédent remplacer

Reçu le 19 septembre 1988

isomorphisme par monomorphisme (en d'autres termes: pour une infinité d'entiers n, le groupe $\pi_n X$ contient un élément non trivial d'ordre 2!).

Cette conjecture a été démontrée en 1983 par C. McGibbon et J. Neisendorfer [GN] en utilisant le théorème de H. R. Miller suivant:

THÉORÈME [Mi]. *L'espace des applications pointées, du classifiant $B\mathbf{Z}/2$ du groupe $\mathbf{Z}/2$, dans un CW-complexe de dimension finie, est faiblement contractile.*

Les auteurs ont donné en 1985 une autre preuve de la conjecture de Serre, indépendante du théorème de Miller, en montrant que la cohomologie modulo 2 de certains espaces est localement finie comme module sur l'algèbre de Steenrod. Soit A l'algèbre de Steenrod modulo 2, rappelons qu'un A-module M est dit localement fini si, pour tout x dans M, le sous-A-module Ax engendré par x est fini. La conjecture de Serre peut être vue comme un corollaire du théorème suivant:

THÉORÈME [LS1]. *Soit X un espace simplement connexe de type fini en 2. On suppose:*

(a) *la cohomologie $\tilde{H}^*(X; \mathbf{F}_2)$ est non triviale;*

(b) *le A-module $H^*(X; \mathbf{F}_2)$ est localement fini.*

Alors, pour une infinité d'entiers n, le groupe $\pi_n X$ contient un élément non trivial d'ordre 2.

Dans cette note on s'intéresse à une autre généralisation du théorème de Serre:

THÉORÈME 0.1. *Soit X un espace simplement connexe de type fini en 2. On suppose:*

(a) *la cohomologie $\tilde{H}^*(X; \mathbf{F}_2)$ est non triviale;*

(b) *la cohomologie $\tilde{H}^*(X; \mathbf{F}_2)$ est nilpotente (tout élément de $\tilde{H}^*(X; \mathbf{F}_2)$ est nilpotent).*

Alors, pour une infinité d'entiers n, la multiplication par 2 du groupe $\pi_n X$ dans lui-même n'est pas un isomorphisme.

Remarquons qu'un tel espace ne vérifie pas en général la conjecture de Serre comme le montre l'exemple du groupe spécial unitaire infini.

On notera qu'on ne demande pas, dans la condition (b) ci-dessus, que $\tilde{H}^*(X; \mathbf{F}_2)$ soit "uniformément" nilpotente, c'est à dire qu'il existe un entier n tel que x^n soit nul pour tout x dans $\tilde{H}^*(X; \mathbf{F}_2)$.

Le théorème 0.1 est à comparer au suivant, obtenu en 1987 par S. Halperin, Y. Félix, J-M. Lemaire, et J.-C. Thomas:

THÉORÈME [HFLT]. *Soit X un espace simplement connexe de type fini en 2. On suppose*:

(a) *la cohomologie $\tilde{H}^*(X; \mathbf{F}_2)$ est non triviale*:

(b) *X est un n-cône (cette notion se définit par récurrence: un 0-cône est contractile et un n-cône est la cofibre d'une application dans un $(n-1)$-cône).*

Alors X n'admet pas de "décomposition de Postnikov généralisée en 2" qui soit finie.

La démonstration du Théorème 0.1 (comme celle que nous avions donnée de la conjecture de Serre) utilise les opérations de Steenrod qui n'apparaissent pas dans [HFLT].

On note $\mathscr{K}$ la catégorie des A-algèbres instables (voir par exemple [LZ], la cohomologie modulo 2 d'un espace X est le type même d'un objet de $\mathscr{K}$). Soit d un entier, on note comme d'habitude $H^*((\mathbf{Z}/2)^d; \mathbf{F}_2)$ la cohomologie modulo 2 du groupe $(\mathbf{Z}/2)^d$; $H^*((\mathbf{Z}/2)^d; \mathbf{F}_2) = H^*(B(\mathbf{Z}/2)^d; \mathbf{F}_2)$ est un objet de $\mathscr{K}$. La notation $\mathrm{Hom}_{\mathscr{K}}(H^*(X; \mathbf{F}_2), H^*((\mathbf{Z}/2)^d; \mathbf{F}_2))$ désigne donc l'ensemble des applications de $H^*(X; \mathbf{F}_2)$ dans $H^*((\mathbf{Z}/2)^d; \mathbf{F}_2)$, linéaires de degré zéro, compatibles avec produit, unité, et opérations de Steenrod. Puisque $H^*((\mathbf{Z}/2)^d; \mathbf{F}_2)$ ne contient pas d'éléments nilpotents non triviaux la condition (b) du Théorème 0.1 implique la suivante:

(c) *l'ensemble* $\mathrm{Hom}_{\mathscr{K}}(H^*(X; \mathbf{F}_2), H^*((\mathbf{Z}/2)^d; \mathbf{F}_2))$ *est trivial pour tout d.*

Aussi le Théorème 0.1 est-il conséquence de la proposition suivante:

PROPOSITION 0.2. *Soit X un espace simplement connexe de type fini en 2. On suppose*:

(a) *la cohomologie $\tilde{H}^*(X; \mathbf{F}_2)$ est non triviale*;

(b) *la multiplication par 2 du groupe $\pi_n X$ dans lui-même est un isomorphisme dés que n est assez grand.*

Alors l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathscr{K}}(H^*(X; \mathbf{F}_2), H^*((\mathbf{Z}/2)^d; \mathbf{F}_2))$ *est non trivial dés que d est assez grand.*

Signalons que la condition (b) du Théorème 0.1 et la condition (c) ci-dessus sont en fait équivalentes et qu'il en est donc de même pour les énoncés 0.1 et 0.2.

On donne deux démonstrations de la proposition 0.2.

La première dépend du théorème suivant:

THÉORÈME 0.3 [La1]. *Soit X un espace simplement connexe de type fini en 2. L'application naturelle*:

$$[B(\mathbf{Z}/2)^d, X] \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{K}}(H^*(X; \mathbf{F}_2), H^*((\mathbf{Z}/2)^d; \mathbf{F}_2)),$$

$[B(\mathbf{Z}/2)^d, X]$ désignant l'ensemble des classes d'homotopie d'applications de $B(\mathbf{Z}/2)^d$ dans X, est une bijection.

Lequel montre que la condition (c) est encore équivalente à la suivante:

(c bis) *l'ensemble $[B(\mathbf{Z}/2)^d, X]$ est trivial pour tout d.*

Soit X un espace vérifiant les hypothèses de la Proposition 0.2, on est donc ramené à prouver que l'ensemble $[B(\mathbf{Z}/2)^d, X]$ est non trivial dés que d est assez grand. Voici brièvement comment l'on procède. Soient m le plus grand entier tel que la multiplication par 2 du groupe $\pi_m X$ dans lui-même n'est pas un isomorphisme et X_m le m-ème espace de la tour de Postnikov de X, on montre que la taille du "noyau" de l'application:

$$[B(\mathbf{Z}/2)^d, K(\pi_m X, m)] \to [B(\mathbf{Z}/2)^d, X_m] = [B(\mathbf{Z}/2)^d, X]$$

devient négligeable devant cellè de $[B(\mathbf{Z}/2)^d, K(\pi_m X, m)]$ quand d tend vers l'infini. Le lecteur familier avec [Se] constatera que notre méthode est en fait assez voisine de celle de Serre.

La deuxième démonstration que l'on propose est une variante de la première. Elle consiste à montrer, sans avoir recours au Théorème 0.3, que le foncteur: $X \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathscr{K}}(H^*(X; \mathbf{F}_2), H^*((\mathbf{Z}/2)^d; \mathbf{F}_2))$ transforme, sous certaines hypothèses, fibrations d'espaces en suites exactes d'ensembles. Pour allèger la notation on pose

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{K}}(H^*(X; \mathbf{F}_2), H^*((\mathbf{Z}/2)^d; \mathbf{F}_2)) = [B(\mathbf{Z}/2)^d, X]_{\mathscr{K}}.$$

PROPOSITION 0.4. *Soit $F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B$ une fibration d'espaces (B est donc un espace pointé). On suppose que B est connexe et que l'action de $\pi_1 B$ sur $H_*(F; \mathbf{F}_2)$ est nilpotente; on suppose en outre que les espaces F, E, et B sont de type fini en 2. Alors la suite d'ensembles*:

$$[B(\mathbf{Z}/2)^d, F]_{\mathscr{K}} \xrightarrow{i_*} [B(\mathbf{Z}/2)^d, E]_{\mathscr{K}} \xrightarrow{p_*} [B(\mathbf{Z}/2)^d, B]_{\mathscr{K}}$$

est exacte (le noyau de p_*, c'est à dire l'image réciproque par p_* du point base de $[B(\mathbf{Z}/2)^d, B]_{\mathscr{K}}$, est égale à l'image de i_*).

On peut alors dans la démonstration précédente remplacer le foncteur $[B(\mathbf{Z}/2)^d, -]$ par le foncteur $[B(\mathbf{Z}/2)^d, -]_{\mathscr{K}}$.

La Proposition 0.4 quant à elle est conséquence de l'injectivité de $H^*((\mathbf{Z}/2)^d; \mathbf{F}_2)$ dans la catégorie $\mathscr{K}$ (voir [LZ]) et du théorème suivant:

THÉORÈME 0.5. *Soit $F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B$ une fibration vérifiant les hypothèses précédentes. Alors le noyau de l'application:*

$$\mathbf{F}_2 \bigotimes_{H^*(B;\mathbf{F}_2)} H^*(E; \mathbf{F}_2) \to H^*(F; \mathbf{F}_2)$$

induite par i^*, est constitué d'éléments nilpotents ($H^*(E; \mathbf{F}_2)$ est un $H^*(B; \mathbf{F}_2)$-module via p^* et $\mathbf{F}_2$ via l'augmentation de $H^*(B; \mathbf{F}_2)$).

La démonstration de ce théorème consiste en une analyse "aux nilpotents prés" de la suite spectrale d'Eilenberg–Moore de la fibration $F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B$, analogue à celle effectuée dans [Sc] pour la fibration $\Omega X \to * \to X$.

Signalons là encore que l'on montre que les énoncés 0.4 et 0.5 sont équivalents.

Cette note a été préparée alors que le second auteur séjournait à l'Université de Chicago et à l'Université Northwestern. Il tient à remercier ici ces deux institutions pour leur soutien, pour leur accueil amical et leur atmosphère stimulante.

1. Démonstration de la Proposition 0.2 à l'aide du Théorème 0.3

Compte tenu du Théorème 0.3, la Proposition 0.2 est équivalente à la suivante:

PROPOSITION 1.1. *Soit X un espace simplement connexe de type fini en 2. On suppose:*

(a) *la cohomologie $\tilde{H}^*(X; \mathbf{F}_2)$ est non triviale;*

(b) *la multiplication par 2 du groupe $\pi_n X$ dans lui-même est un isomorphisme dés que n est assez grand.*

Alors l'ensemble $[B(\mathbf{Z}/2)^d, X]$ est non trivial dés que d est assez grand.

Avant de démontrer cette proposition commencons par rappeler quelques rudiments de la théorie des fibrations.

Soit $p: E \to B$ une fibration. On suppose que B est pointé, on note F la fibre de p au-dessus du point base de B et $i: F \to E$ l'inclusion de F dans E; on dit aussi que la suite d'espaces $F \to E \to B$ est une fibration. On a alors, pour tout espace Y, les propriétés suivantes.

(1.2) La suite d'ensembles $[Y, F] \xrightarrow{i_*} [Y, E] \xrightarrow{p_*} [Y, B]$ est exacte.

Répètons que ceci signifie que le noyau de p_*, c'est à dire l'image réciproque par p_* du point base de $[Y, B]$, est égale à l'image de i_*.

(1.3) Le groupe $[Y, \Omega B]$ agit sur l'ensemble $[Y, F]$.

(1.4) Si l'on choisit un point base dans F, l'application de $[Y, \Omega B]$ dans $[Y, F]$, donnée par l'action de $[Y, \Omega B]$ sur le point base correspondant de $[Y, F]$, est induite par une application pointée $a : \Omega B \to F$.

(1.5) La suite $\Omega E \xrightarrow{\Omega p} \Omega B \xrightarrow{a} F$ est une "fibration à homotopie prés" et d'aprés (1.2), (1.3), et (1.4) "l'ensemble homogène" $[Y, \Omega B]/[Y, \Omega E]$ s'injecte dans $[Y, F]$.

(1.6) La suite $\Omega F \xrightarrow{\Omega i} \Omega E \xrightarrow{\Omega p} \Omega B$ est une fibration. Dans ce cas d'aprés (1.2) la suite de groupes $[Y, \Omega F] \xrightarrow{\Omega i_*} [Y, \Omega E] \xrightarrow{\Omega p_*} [Y, \Omega B]$ est exacte (dans le sens habituel).

Venons-en maintenant à la démonstration de 1.1. Soient, X satisfaisant aux hypothèses de la proposition, m le plus grand entier tel que la multiplication par 2 du groupe $\pi_m X$ dans lui-même ne soit pas un isomorphisme, et X_m le m-ème espace de la tour de Postnikov de X. On remarque tout d'abord que l'application: $[B(\mathbf{Z}/2)^d, X] \to [B(\mathbf{Z}/2)^d, X_m]$ est une bijection. On considère ensuite la fibration

$$X_m \to X_{m-1} \to K(\pi_m X, m+1).$$

D'aprés (1.5) il suffit de montrer que l'on a pour d assez grand l'inégalité (stricte):

$$\#[B(\mathbf{Z}/2)^d, \Omega X_{m-1}] < \#[B(\mathbf{Z}/2)^d, K(\pi_m X, m)]$$

soit encore:

$$\#[B(\mathbf{Z}/2)^d, \Omega X_{m-1}] < \# H^m((\mathbf{Z}/2)^d; \pi_m X).$$

Dans ces inégalités le symbole # désigne le cardinal d'un ensemble. Or d'aprés (1.6) on a:

$$\#[B(\mathbf{Z}/2)^d, \Omega X_{m-1}] \leqq \prod_{2 \leqq i \leqq m-1} \#[B(\mathbf{Z}/2)^d, K(\pi_i X, i-1)],$$

soit encore:

$$\#[B(\mathbf{Z}/2)^d, \Omega X_{m-1}] \leqq \prod_{2 \leqq i \leqq m-1} \# H^{i-1}((\mathbf{Z}/2)^d; \pi_i X).$$

Les groupes $H^m((\mathbf{Z}/2)^d; \pi_m X)$ et $H^{i-1}((\mathbf{Z}/2)^d; \pi_i X)$ qui apparaissent ci-dessus sont des $\mathbf{F}_2$-espaces vectoriels car la cohomologie réduite du groupe $(\mathbf{Z}/2)^d$, à coefficients constants, est annulée par la multiplication par 2. Ils sont de dimension finie parce que X est de type fini en 2 et on est ramené à montrer que l'on a pour tout d assez grand:

$$\sum_{2 \leqq i \leqq m-1} \dim_{\mathbf{F}_2} H^{i-1}((\mathbf{Z}/2)^d; \pi_i X) < \dim_{\mathbf{F}_2} H^m((\mathbf{Z}/2)^d; \pi_m X).$$

La définition de l'entier m entraîne que l'un des deux groupes ${}_2(\pi_m X)$ ou $\mathbf{Z}/2 \otimes \pi_m X$ est non trivial (la notation ${}_2(-)$ désigne le sous-groupe des éléments d'ordre 2) et on conclut à l'aide du lemme suivant:

LEMME 1.7. *Soient π un groupe abélien et n un entier, $n \geqq 1$. On suppose que les dimensions sur $\mathbf{F}_2$ des groupes ${}_2\pi$ et $\mathbf{Z}/2 \otimes \pi$ sont finies. Alors la fonction: $d \mapsto \dim_{\mathbf{F}_2} H^n((\mathbf{Z}/2)^d; \pi)$ admet quand d tend vers l'infini les équivalents suivants:*

Si $\dim_{\mathbf{F}_2}({}_2\pi)$ est non nulle:

$$\dim_{\mathbf{F}_2} H^n((\mathbf{Z}/2)^d; \pi) \sim (\dim_{\mathbf{F}_2}({}_2\pi)/n!)d^n.$$

Si $\dim_{\mathbf{F}_2}({}_2\pi)$ est nulle ($n \geqq 2$):

$$\dim_{\mathbf{F}_2} H^n((\mathbf{Z}/2)^d; \pi) \sim (\dim_{\mathbf{F}_2}(\mathbf{Z}/2 \otimes \pi)/(n-1)!)d^{n-1}$$

(*cette formule est encore valable si $\dim_{\mathbf{F}_2}(\mathbf{Z}/2 \otimes \pi)$ est nulle puisque dans ce cas le groupe $H^n((\mathbf{Z}/2)^d; \pi)$ est trivial*).

Ce lemme quant à lui est conséquence du lemme 1.8 ci-dessous. Soit $S^\pi(q)$ la série de Poincaré de $\tilde{H}^*((\mathbf{Z}/2)^d; \pi)$:

$$S^\pi(q) = \sum_{n>0} \dim_{\mathbf{F}_2} H^n((\mathbf{Z}/2)^d; \pi) q^n.$$

LEMME 1.8. *La série $S^\pi(q)$ est donnée par la formule suivante:*

$$S^\pi(q) = (\alpha + \beta q)(1+q)^{-1}((1-q)^{-d} - 1)$$

où α et β désignent respectivement $\dim_{\mathbf{F}_2}({}_2\pi)$ *et* $\dim_{\mathbf{F}_2}(\mathbf{Z}/2\otimes\pi)$.

DÉMONSTRATION. On considère la suite exacte des coefficients universels:

$$0\to \operatorname{Ext}(H_{n-1}((\mathbf{Z}/2)^d;\mathbf{Z}),\pi)\to H^n((\mathbf{Z}/2)^d;\pi)\to \operatorname{Hom}(H_n((\mathbf{Z}/2)^d;\mathbf{Z}),\pi)\to 0.$$

Parce que $\tilde{H}_*((\mathbf{Z}/2)^d;\mathbf{Z})$ est "tué par 2" on des isomorphismes:

$$\operatorname{Hom}(H_n((\mathbf{Z}/2)^d;\mathbf{Z}),\pi)\cong({}_2\pi)\otimes\operatorname{Hom}(H_n((\mathbf{Z}/2)^d;\mathbf{Z}),\mathbf{Z}/2),$$

$$\operatorname{Ext}(H_{n-1}((\mathbf{Z}/2)^d;\mathbf{Z}),\pi)\cong(\mathbf{Z}/2\otimes\pi)\otimes H_{n-1}((\mathbf{Z}/2)^d;\mathbf{Z}),$$

et on en déduit:

$$S^\pi(q)=(\alpha+\beta q)S_{\mathbf{Z}}(q),$$

$S_{\mathbf{Z}}(q)$ désignant la série de Poincaré de $\tilde{H}_*((\mathbf{Z}/2)^d;\mathbf{Z})$. En faisant $\pi=\mathbf{Z}/2$ dans cette formule on obtient l'expression de $S_{\mathbf{Z}}(q)$ à partir de celle de $S^{\mathbf{Z}/2}(q): S^{\mathbf{Z}/2}(q)=(1-q)^{-d}-1$. Le lemme en découle.

2. Démonstration de la Proposition 0.2 à l'aide de la Proposition 0.4

On va, dans la démonstration précédente, remplacer le foncteur $[B(\mathbf{Z}/2)^d,-]$ par le foncteur $[B(\mathbf{Z}/2)^d,-]_{\mathscr{K}}$.

Soit $F\xrightarrow{i}E\xrightarrow{p}B$ une fibration d'espaces simplement connexes et de type fini en 2. On peut, essentiellement grâce à la Proposition 0.4, substituer $[B(\mathbf{Z}/2)^d,-]_{\mathscr{K}}$ à $[Y,-]$ dans les énoncés (1.2) à (1.6). On obtient ainsi des énoncés (1.2 bis) à (1.6 bis). La Proposition 0.4 n'est autre que (1.2 bis). Elle intervient également pour (1.5 bis) et (1.6 bis). Le reste est formel. On observera que les fibrations $\Omega E\to\Omega B\to F$ et $\Omega F\to\Omega E\to\Omega B$ satisfont bien les hypothèses de la Proposition 0.4.

La démonstration s'achève comme au paragraphe 1 si l'on sait que l'application naturelle:

$$[B(\mathbf{Z}/2)^d,K(\pi,n)]\to[B(\mathbf{Z}/2)^d,K(\pi,n)]_{\mathscr{K}}$$

est une bijection pour tout groupe abélien π tel que ${}_2\pi$ et $(\mathbf{Z}/2)\otimes\pi$ sont de dimension finie (on s'interdit bien sûr d'utiliser ici le Théorème 0.3!).

Pour vérifier ce point on procède comme suit. On observe tout d'abord qu'on peut se ramener au cas où π est l'un des groupes $\mathbf{Z}/2$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Z}/2^h$ ($h\geqq 2$), $\mathbf{Z}/2^\infty$ (i.e. $\mathbf{Z}[\frac{1}{2}]/\mathbf{Z}$).

On observe ensuite que les résultats de [Se] concernant la cohomologie modulo 2 des complexes d'Eilenberg–MacLane peuvent se reformuler comme suit. Soit M une A-algèbre instable, alors l'ensemble

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{K}}(H^*(K(\pi, n); \mathbf{F}_2), M)$$

est naturellement isomorphe à:

M^n si $\pi = \mathbf{Z}/2$;

$\ker(Sq^1 : M^n \to M^{n+1})$ si $\pi = \mathbf{Z}$;

$\ker(Sq^1 : M^n \to M^{n+1}) \oplus \ker(Sq^1 : M^{n+1} \to M^{n+2})$ si $\pi = \mathbf{Z}/2^h$ $(h \geqq 2)$;

$\ker(Sq^1 : M^{n+1} \to M^{n+2})$ si $\pi = \mathbf{Z}/2^\infty$.

On en déduit que l'application naturelle:

$$[Y, K(\pi, n)] \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{K}}(H^*(K(\pi, n); \mathbf{F}_2), H^*(Y; \mathbf{F}_2))$$

est une bijection dés que $\tilde{H}_*(Y; \mathbf{Z})$ est tué par 2.

3. Démonstration du Théorème 0.5

Avant d'attaquer cette démonstration il nous faut rappeler quelques définitions, notations, et propriétés concernant la catégorie des A-modules instables.

On note $\mathscr{U}$ la catégorie dont les objets sont les A-modules instables et les morphismes les applications A-linéaires de degré zéro (voir par exemple [LZ]).

Le foncteur suspension $\Sigma : \mathscr{U} \to \mathscr{U}$ est défini par:

$$(\Sigma M)^n = M^{n-1}, \qquad \theta(\Sigma x) = \Sigma(\theta x)$$

θ désignant un élément de A et Σx l'élément de ΣM correspondant à un élément x de M. La notation Σ^r désigne le r-ème itéré de Σ.

On dit qu'un élément x d'un A-module instable M est nilpotent s'il existe un entier n tel que:

$$\mathrm{Sq}^{2^n|x|}\mathrm{Sq}^{2^{n-1}|x|} \cdots \mathrm{Sq}^{|x|}x = 0$$

$|x|$ désignant le degré de x. Lorsque M est aussi une A-algèbre instable cette définition coïncide avec la définition habituelle ce qui justifie cette terminologie. On dit qu'un A-module instable M est nilpotent si tous ses éléments sont nilpotents.

On montre dans [LS2] que les A-modules instables nilpotents admettent la caractérisation ci-dessous. Soit V un 2-groupe abélien élémentaire (i.e. un groupe isomorphe à $(\mathbf{Z}/2)^d$ pour un certain d), on pose $H^*V = H^*(V; \mathbf{F}_2) = H^*(BV; \mathbf{F}_2)$.

THÉORÈME 3.1. *Soit M un A-module instable. Les deux conditions suivantes sont équivalentes*:

(i) *M est nilpotent*;

(ii) $\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(M, H^*V) = 0$ *pour tout 2-groupe abélien élémentaire V.*

Voici une façon de reformuler cette caractérisation qui peut apparaître *a priori* un tantinet pédante mais qui se révèlera utile par la suite. Soit T_V le foncteur de $\mathcal{U}$ dans $\mathcal{U}$ défini par la formule d'adjonction:

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(M, H^*V \otimes N) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(T_V M, N).$$

Alors un A-module instable M est nilpotent si et seulement si le A-module instable $T_V M$ est connexe pour tout 2-groupe abélien élémentaire V.

La définition du foncteur T_V est détaillée dans [La1]. On renvoie à cette référence pour les démonstrations des propriétés de T_V qui seront utilisées ci-dessous (voir aussi [La2]).

Rappelons que l'on dit qu'un A-module instable M est connexe si M^0 est nul. Plus généralement on dira que M est r-connexe si M^n est nul pour $n \leqq r$. Cette définition s'étend bien sûr aux $\mathbf{F}_2$-espaces vectoriels $\mathbf{N}$-gradués.

Nous sommes maintenant prêts pour la démonstration du Théorème 0.5 (que l'on pourra comparer avec celle de la Proposition 2.1(iii) de [Sc]).

Pour alléger la notation, la cohomologie modulo 2 d'un espace, qui était jusqu'à présent notée $H^*(-; \mathbf{F}_2)$, sera simplement notée H^*.

Soit K le noyau de l'application: $\mathbf{F}_2 \otimes_{H^*B} H^*E \to H^*F$ induite par i^*; K est une A-algèbre instable sans unité. D'aprés ce qui précède il nous faut montrer que le A-module instable sous-jacent à K est nilpotent ou encore que le A-module instable $T_V K$ est connexe pour tout 2-groupe abélien élémentaire V.

Pour cela on considère la suite spectrale d'Eilenberg–Moore de la fibration $F \to E \to B$. Cette suite spectrale possède les propriétés suivantes:

Il s'agit d'une suite spectrale "cohomologique du deuxième quadrant" qui sous les hypothèses de (0.5) converge "fortement" vers H^*F [Dw].

Les "colonnes" $E_r^{-s,*}$, $s \geqq 0$, $2 \leqq r \leqq \infty$, sont des A-modules instables et les différentielles $d_r: E_r^{-s,*} \to \Sigma^{r-1} E_r^{-s,*}$ sont A-linéaires de degré zéro [Re] [Sm].

L'application: $\mathbf{F}_2 \otimes_{H^*B} H^*E \to H^*F$ dont on veut étudier le noyau s'identifie, comme morphisme de A-modules instables, au "edge homomorphism": $E_2^{0,*} \to H^*F$.

On en déduit que K admet, comme A-module instable, une filtration croissante convergente: $0 = K_1 \subset K_2 \subset \cdots \subset K_s \subset \cdots$ et que l'on a:

$$\Sigma^{s-1} K_s / K_{s-1} \cong d_s E_s^{-s,*}.$$

Il suffit alors de montrer que le A-module instable $T_V(E_2^{-s,*})$ est $(s-1)$-connexe. En effet on a la chaîne d'implications suivante.

Si le A-module instable $T_V(E_2^{-s,*})$ est $(s-1)$-connexe, il en est de même pour les A-modules instables $T_V(E_r^{-s,*})$, $r \geqq 2$, et $T_V(d_s E_s^{-s,*})$, puisque le foncteur T_V est exact. Comme T_V commute aux suspensions $T_V(K_s/K_{s-1})$ est 0-connexe. Comme T_V est exact K_s est 0-connexe. Comme T_V commute aux limites directes $T_V K$ est 0-connexe.

Il reste à montrer que $T_V(E_2^{-s,*})$ est $(s-1)$-connexe. C'est une conséquence du lemme suivant:

Lemme 3.2. *Soient*:

L une A-algèbre instable augmentée connexe (ce qui signifie que son idéal d'augmentation est connexe);

M un A-module instable qui est un L-module pour lequel l'application de structure $L \otimes M \to M$ est A-linéaire.

Alors le A-module instable $T_V(\mathrm{Tor}_L^{-s,*}(\mathbf{F}_2, M))$ est $(s-1)$-connexe.

Démonstration. Comme T_V "commute aux produits tensoriels" $T_V L$ est une A-algèbre instable et $T_V M$ est un $T_V L$-module pour lequel l'application de structure est A-linéaire. En utilisant l'exactitude de T_V et à nouveau la commutation aux produits tensoriels on obtient un isomorphisme:

$$T_V(\mathrm{Tor}_L^{-s,*}(\mathbf{F}_2, M)) \cong \mathrm{Tor}_{T_V L}^{-s,*}(\mathbf{F}_2, T_V M).$$

Le fait que $T_V L$ est une A-algèbre instable implique en particulier que $(T_V L)^0$ est une algèbre de Boole et on achève la démonstration de 3.2 à l'aide du lemme suivant:

Lemme 3.3. *Soient L une $\mathbf{F}_2$-algèbre $\mathbf{N}$-graduée, unitaire, commutative, augmentée, non nécessairement connexe, et M un L-module $\mathbf{N}$-gradué. On suppose que L^0 est une algèbre de Boole. Alors, pour tout entier s, le $\mathbf{F}_2$-espace vectoriel $\mathbf{N}$-gradué $\mathrm{Tor}_L^{-s,*}(\mathbf{F}_2, M)$ est $(s-1)$-connexe.*

Démonstration. On va se ramener au cas où L est connexe qui est classique. Soient $\varepsilon : L \to \mathbf{F}_2$ l'augmentation de L et L_ε le produit tensoriel $\mathbf{F}_2 \otimes_{L^0} L$ ($\mathbf{F}_2$ et L sont des L^0-modules respectivement via ε et l'inclusion de L^0 dans L); L_ε est une $\mathbf{F}_2$-algèbre $\mathbf{N}$-graduée, unitaire, commutative, augmentée, qui maintenant est connexe. Soit M_ε le produit tensoriel $\mathbf{F}_2 \otimes_{L^0} M \cong L_\varepsilon \otimes_L M$; M_ε est un L_ε-module $\mathbf{N}$-gradué. On conclut grâce à l'isomorphisme:

$$\mathrm{Tor}_L^{-s,*}(\mathbf{F}_2, M) \cong \mathrm{Tor}_{L_\varepsilon}^{-s,*}(\mathbf{F}_2, M_\varepsilon)$$

(correspondant pour $s = 0$ à la factorisation de ε à travers L_ε).

On peut se convaincre de cet isomorphisme avec les arguments suivants:
tout module sur une algèbre de Boole de dimension finie est projectif;
par passage à la limite inductive tout module sur une algèbre de Boole est plat;
puisque $\mathbf{F}_2$ est un L^0-module plat, le foncteur qui associe au L-module M le L_ε-module M_ε est exact: L_ε est un L-module plat.

4. Cohomologie modulo 2 des 2-groupes abéliens élémentaires et F-isomorphismes entre A-algèbres instables

L'objet de ce dernier paragraphe est de montrer que les énoncés 0.1 et 0.2 (resp. 0.4 et 0.5) sont équivalents. Il s'agit en fait de montrer les lemmes suivants:

LEMME 4.1. *Soit M une A-algèbre instable, les deux conditions suivantes sont équivalentes*:

(i) *M est nilpotente (M^0 est engendré par l'unité et tout élément de degré strictement positif est nilpotent)*;

(ii) *l'ensemble* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(M, H^*V)$ *est trivial pour tout 2-groupe abélien élémentaire V.*

LEMME 4.2. *Soit $K \xrightarrow{f} L \xrightarrow{g} M$ une suite de A-algèbres instables. On suppose que K est augmentée et que la composition $g \circ f$ est égale à $\eta \circ \varepsilon$, η désignant l'unité de M et ε l'augmentation de K. Alors les deux conditions suivantes sont équivalentes*:

(i) *le noyau de l'application*:

$$\mathbf{F}_2 \bigotimes_K L \to M$$

induite par g, est constitué d'éléments nilpotents (L est un K-module via f et $\mathbf{F}_2$ *via ε)*;

(ii) *la suite d'ensembles*:

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(M, H^*V) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(L, H^*V) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(K, H^*V)$$

est exacte pour tout 2-groupe abélien élémentaire V.

Il s'agit dans les deux cas d'une conséquence de la caractérisation des

F-isomorphismes (au sens de Quillen [Qui], voir ci-dessous) donnée dans [LS2] [La1]:

THÉORÈME 4.3. *Soit* $\rho : M \to M'$ *un morphisme de A-algèbres instables, alors les deux conditions suivantes sont équivalentes*:

(i) *le morphisme de* $\mathbf{F}_2$*-algèbres commutatives sous-jacent à* ρ *est un* F*-isomorphisme*;

(ii) ρ *induit une bijection*: $\mathrm{Hom}_{\mathscr{K}}(M', H^*V) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{K}}(M, H^*V)$ *pour tout* 2*-groupe abélien élémentaire* V.

Rappelons que ρ est un F-isomorphisme de $\mathbf{F}_2$-algèbres commutatives si:

(a) le noyau de ρ est constitué d'éléments nilpotents;

(b) pour tout élément x de M' il existe un entier n tel que x^{2^n} est dans l'image de ρ.

Rappelons également que le Théorème 4.3 est une conséquence de la caractérisation des A-modules instables nilpotents donnée en 3.1 et du théorème de "linéarisation" A.2.2 de [LZ].

DÉMONSTRATION DU LEMME 4.1. La condition (i) signifie que l'unité: $\mathbf{F}_2 \to M$ est un F-isomorphisme et on applique 4.3.

DÉMONSTRATION DU LEMME 4.2. Posons $Q = \mathbf{F}_2 \otimes_K L$ et $I = g(L)$. L'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathscr{K}}(Q, H^*V)$ s'identifie au noyau de $f^* : \mathrm{Hom}_{\mathscr{K}}(L, H^*V) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{K}}(K, H^*V)$; d'autre part, puisque H^*V est injective dans la catégorie $\mathscr{K}$ [LZ], l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathscr{K}}(I, H^*V)$ s'identifie à l'image de g^*:

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{K}}(M, H^*V) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{K}}(L, H^*V).$$

La condition (ii) signifie donc que l'application: $\mathrm{Hom}_{\mathscr{K}}(I, H^*V) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{K}}(Q, H^*V)$ induite par g est une bijection. Comme la condition (i) signifie que l'application: $Q \to I$ induite par g est un F-isomorphisme, on peut encore appliquer 4.3.

RÉFÉRENCES

[Dw] W. G. Dwyer, *Strong convergence of the Eilenberg–Moore spectral sequence*, Topology **13** (1974), 255–265.

[GN] C. McGibbon and J. Neisendorfer, *On the homotopy groups of a finite dimensional space*, Comment. Math. Helv. **59** (1984), 253–257.

[HFLT] S. Halperin, Y. Félix, J.-M. Lemaire et J. C. Thomas, Mod-*p loop space homology*, PUB–IRMA Lille, 1987.

[La1] J. Lannes, *Sur la cohomologie modulo p des p-groupes abéliens élémentaires*, Proc. Durham Symposium on Homotopy Theory 1985, L.M.S., Cambridge University Press, 1987, pp. 97–116.

[La2] J. Lannes, *Sur les espaces fonctionnels dont la source est le classifiant d'un p-groupe abélien élémentaire*, en préparation.

[LS1] J. Lannes et L. Schwartz, *A propos de conjectures de Serre et Sullivan*, Invent. Math. **83** (1986), 593–603.

[LS2] J. Lannes et L. Schwartz, *Sur la structure des A-modules instables injectifs*, à paraître dans Topology.

[LZ] J. Lannes et S. Zarati, *Sur les foncteurs dérivés de la déstabilisation*, Math. Z. **194** (1987), 25–59.

[Mi] H. R. Miller, *The Sullivan conjecture on maps from classifying spaces*, Ann. of Math. **120** (1984), 39–87.

[Qui] D. Quillen, *The spectrum of an equivariant cohomology ring, I, II*, Ann. of Math. **94** (1971), 549–572, 573–602.

[Re] D. Rector, *Steenrod operations in the Eilenberg–Moore spectral sequence*, Comment. Math. Helv. **45** (1970), 540–552.

[Sc] L. Schwartz, *La filtration nilpotente de la catégorie $\mathcal{U}$ et la cohomologie des espaces de lacets*, Proc. Louvain la Neuve 1986, Lecture Notes in Math. **1318**, Springer-Verlag, Berlin, 1986.

[Se] J.-P. Serre, *Cohomologie modulo 2 des complexes d'Eilenberg–MacLane*, Comment. Math. Helv. **27** (1953), 198–232.

[Sm] L. Smith, *On Künneth theorem I. The Eilenberg–Moore spectral sequence*, Math. Z. **116** (1970), 94–140.